2 Combinatoriek

Voorkennis Rekenen

Bladzijde 54

1 a $10(5 \cdot 3 - 6) - \frac{80}{4^2} = 10(15 - 6) - \frac{80}{16} = 10 \cdot 9 - 5 = 90 - 5 = 85$

b $\frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot 4}{7 \cdot 4 - 3 \cdot 4} = \frac{20 + 12}{28 - 12} = \frac{32}{16} = 2$

c $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 = 360 + 56 = 416$

d $\frac{75}{2 \cdot 3^2 - 3} = \frac{75}{2 \cdot 9 - 3} = \frac{75}{18 - 3} = \frac{75}{15} = 5$

e $4(2^3 - 3) - 8 : 2 \cdot 5 = 4(8 - 3) - 4 \cdot 5 = 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = 0$

f $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 - 9 \cdot 8 + 2} = \frac{60}{90 - 72 + 2} = \frac{60}{20} = 3$

2 a $\frac{72}{2 \cdot 6} = \frac{72}{12} = 6$

b $72 : 2 \cdot 6 = 36 \cdot 6 = 216$

c $72 : 2 : 6 = 36 : 6 = 6$

d $\frac{18 + 24}{4 + 2} = \frac{42}{6} = 7$

e $18 + 24 : 4 + 2 = 18 + 6 + 2 = 26$

f $18 + 24 : (4 + 2) = 18 + 24 : 6 = 18 + 4 = 22$

g $\frac{120}{5(3 \cdot 2 + 2)} = \frac{120}{5(6 + 2)} = \frac{120}{5 \cdot 8} = \frac{120}{40} = 3$

h $120 : 5(3 \cdot 2 + 2) = 120 : 5 \cdot 8 = 24 \cdot 8 = 192$

i $120 : 5 \cdot 3 \cdot 2 + 2 = 24 \cdot 3 \cdot 2 + 2 = 144 + 2 = 146$

Bladzijde 55

3 *

4 a 5

b 4

c 2

d 95

2.1 Telproblemen visualiseren

Bladzijde 56

1 a

SOM VAN DE OGEN

blauwe dobbelsteen \ rode dobbelsteen	1	2	3	4	5	6
6	7	8	**9**	**10**	**11**	**12**
5	6	7	8	**9**	**10**	**11**
4	5	6	7	8	**9**	**10**
3	4	5	6	7	8	**9**
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7

b Zie de grijze vakjes. Er zijn 10 mogelijkheden.

c 66, 65, 64, 63, 56, 55, 54, 46, 45, 36

© Noordhoff Uitgevers bv

Alternatieve uitwerking

66 65 64 63
56 55 54
46 45
36

Bladzijde 58

2 **a** Er zijn $10 \times 9 = 90$ wedstrijden.
b $N = n \times (n - 1) = n^2 - n$

3 **a** Bij een halve competitie speelt elk team één keer tegen elk ander team.
b Liefst een rooster of een boomdiagram.
c

	4v1	4v2	4h1	4h2	4h3
4v1	–	–	–	–	–
4v2		–	–	–	–
4h1			–	–	–
4h2				–	–
4h3					–

In totaal 10 wedstrijden.

Alternatieve uitwerking
In een hele competitie met 5 teams speelt elk van de 5 teams 4 thuiswedstrijden.
Dat geeft dus in een hele competitie $4 \times 5 = 20$ wedstrijden.
In een halve competitie zijn er dus $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ wedstrijden.

d In een hele competitie met n teams speelt elk team $n - 1$ thuiswedstrijden.
Dit geeft dus in een hele competitie $n(n - 1)$ wedstrijden.
In een halve competitie zijn er dus $\frac{1}{2}n(n - 1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ wedstrijden.

Alternatieve uitwerking
Tel eerst alle hokjes in het rooster ($n \cdot n = n^2$).
Trek daar de n hokjes van de diagonaal linksboven naar rechtsonder van af.
Deel het resultaat door 2. Dat geeft het aantal wedstrijden.
Dus het aantal wedstrijden is $\dfrac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

e $\frac{1}{2}(n^2 - n) = 45$
$n^2 - n = 90$
$n^2 - n - 90 = 0$
$(n + 9)(n - 10) = 0$
$n = -9 \vee n = 10$
Dus er zijn 10 deelnemende teams.

4 **a** In elke groep van 5 teams worden $5 \times 4 = 20$ wedstrijden gespeeld.
In de voorronde worden dus $8 \times 20 = 160$ wedstrijden gespeeld.

In de eerste ronde van het afvalsysteem worden $4 \times 2 = 8$ wedstrijden gespeeld.
De overgebleven 4 teams spelen in de volgende ronde $2 \times 2 = 4$ wedstrijden.
De laatste 2 teams spelen nog 2 wedstrijden.
In totaal dus $8 + 4 + 2 = 14$ wedstrijden in het afvalsysteem.
Het totaal aantal wedstrijden is dus $160 + 14 = 174$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Of
Bij een afvalsysteem met een uit en een thuiswedstrijd valt er per twee wedstrijden één team af (de verliezer). Er moeten 7 teams afvallen voor de winnaar bekend is.

In het afvalsysteem worden dus 7 × 2 = 14 wedstrijden gespeeld.

In totaal zijn er dus 160 + 14 = 174 wedstrijden.

b De kampioen heeft in de voorronde 4 × 2 = 8 wedstrijden gespeeld en in de finaleronde 3 × 2 = 6 wedstrijden. In totaal dus 8 + 6 = 14 wedstrijden.

5 **a** *AABA*, *ABAA*, *BAAA*: *A* winnaar in 4 sets
BBAB, *BABB*, *ABBB*: *B* winnaar in 4 sets

b *AAA*: *A* winnaar in 3 sets
BBB: *B* winnaar in 4 sets
AABBA, *ABABA*, *ABBAA*, *BAABA*, *BABAA*, *BBAAA*: *A* winnaar in 5 sets
BBAAB, *BABAB*, *BAABB*, *ABBAB*, *ABABB*, *AABBB*: *B* winnaar in 5 sets

Er zijn dus in totaal 2 + 6 + 12 = 20 manieren waarop de partij kan verlopen.

6 **a**

SOM

4	5	6	7	(8)	9	10	11	12
3	4	5	6	7	(8)	9	10	11
2	3	4	5	6	7	(8)	9	10
1	2	3	4	5	6	7	(8)	9
	1	2	3	4	5	6	7	8

Er zijn 4 mogelijkheden om 8 te gooien.

b Zie de grijze vakjes. Er zijn 18 mogelijkheden om minder dan 8 te gooien.

c

PRODUCT

4	4	(8)	12	16	20	24	28	32
3	3	6	9	12	15	18	21	24
2	2	4	6	(8)	10	12	14	16
1	1	2	3	4	5	6	7	(8)
	1	2	3	4	5	6	7	8

Er zijn 3 mogelijkheden om product 8 te krijgen.

Bladzijde 59

7 Met rood eerst zijn er 4 mogelijkheden, namelijk
r g b
r b g
r g r
r b r
En zo zijn er met geel en met blauw eerst ook elk 4 mogelijkheden.
Dus in totaal 3 × 4 = 12 mogelijke achtergronden.

8 **a** **A-D** en **B-E** en **C-F**
A-D en B-F en **C-E**
A-E en B-D en **C-F**
A-E en B-F en C-D
A-F en B-D en C-E
A-F en **B-E** en C-D
Dus 6 manieren.

b Verliefde koppeltjes zijn bij a **vetgedrukt** weergegeven.
Er zijn 2 manieren waarop geen enkel verliefd koppel wordt gevormd.

© Noordhoff Uitgevers bv

9 **a** mogelijkheden 665 656 566
aantal = 3
b mogelijkheden 664 646 466
655 565 556
aantal = 3 + 3 = 6
c Bij som = 16 zijn er 6 mogelijkheden (zie vraag b).
Bij som = 17 zijn er 3 mogelijkheden (zie vraag a).
Bij som = 18 is er alleen de mogelijkheid 666.
aantal = 3 + 6 + 1 = 10
d mogelijkheden 114 141 411
123 132 213 231 312 321
222
aantal = 3 + 6 + 1 = 10

10

		muziek wel	muziek niet	
sport	wel	8	10	**18**
sport	niet	4	**10**	14
		12	20	32

Er zijn 8 leerlingen die een muziekinstrument bespelen en bovendien lid zijn van een sportvereniging.

Bladzijde 60

11

		wiskunde vold.	wiskunde onvold.	
Engels	vold.	15	2	17
Engels	onvold.	7	**4**	**11**
		22	**6**	**28**

Er zijn 15 leerlingen die voor beide proefwerken een voldoende hebben.

12

		alcohol te veel	alcohol niet te veel	
technische staat	goed	70	410	480
technische staat	niet in orde	**6**	26	**32**
		76	436	**512**

410 van de 512 bestuurders kregen geen bekeuring.

Dat is $\frac{410}{512} \times 100\% \approx 80{,}1\%$.

Bladzijde 61

13

		cholesterolverlagend ja	cholesterolverlagend nee	
bijwerkingen	ja	44	32	**76**
bijwerkingen	nee	**406**	18	424
		450	50	**500**

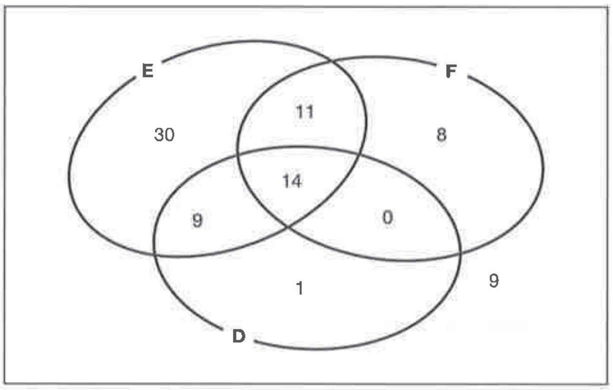
Niet cholesterolverlagend, wel bijwerkingen bij 32 mensen.

14 **a** Bij 12 + 341 = 353 mannen treden er geen bijwerkingen op.
b Er zijn 500 − 403 = 97 vrouwen.
c Bij 65 + 6 = 71 vrouwen in de steekproef treden geen bijwerkingen op.
d Van de 97 vrouwen zijn er 97 − 71 = 26 met bijwerkingen, dat is $\frac{26}{97} \times 100\% \approx 26{,}8\%$.
Van de 403 mannen zijn er 27 + 23 = 50 met bijwerkingen, dat is $\frac{50}{403} \times 100\% \approx 12{,}4\%$.
Dus de bijwerkingen treden meer op bij vrouwen.

Bladzijde 62

15 **a** E: Engels sprekend, F: Frans sprekend en D: Duits sprekend.

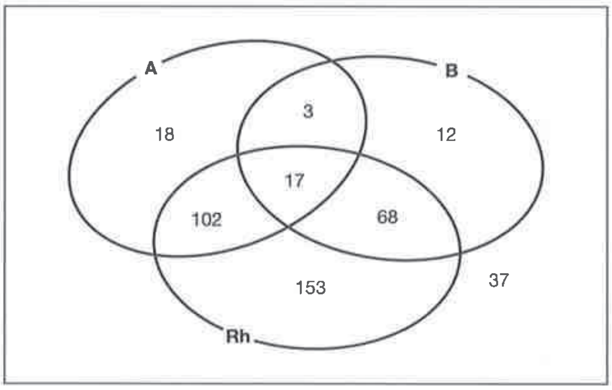
82 WETENSCHAPPERS



Er zijn 9 aanwezigen die geen van de drie talen spreken.
b Geen enkele aanwezige spreekt wel Duits en Frans, maar geen Engels.
c Er is één aanwezige die wel Duits, maar geen Engels of Frans spreekt.

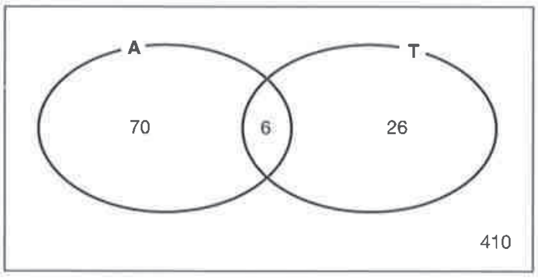
Bladzijde 63

16 **a** 410 MENSEN



B– bij 12 mensen.
Dat is $\frac{12}{410} \times 100\% \approx 2{,}9\%$.
b 0– bij 37 mensen.
Dat is $\frac{37}{410} \times 100\% \approx 9{,}0\%$.

17 512 AUTOMOBILISTEN



© Noordhoff Uitgevers bv

410 van de 512 bestuurders kregen geen bekeuring.
Dat is $\frac{410}{512} \times 100\% \approx 80{,}1\%$.

2.2 Tellen met en zonder herhaling

Bladzijde 65

18 a aantal = $3 \times 4 \times 3 = 36$
b aantal = $2 \times 3 \times 3 = 18$

Bladzijde 66

19 a aantal = $2 \times 4 \times 5 = 40$
b AAA of BBB
aantal = $2 \times 4 \times 5 + 2 \times 2 \times 3 = 52$
c ACA of CAA
aantal = $2 \times 2 \times 5 + 1 \times 4 \times 5 = 40$
d B̸B̸B̸ (B̸ betekent geen B)
aantal = $3 \times 6 \times 5 = 90$
e rood rood rood of geel geel geel of groen groen groen of blauw blauw blauw
aantal = $2 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 = 20$
f groen groen rood of groen rood groen of rood groen groen
aantal = $1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 = 16$

Bladzijde 67

20 a aantal = $11 \times 8 \times 5 = 440$
b aantal = $11 \times (8 + 5) = 11 \times 13 = 143$

21 a aantal = $8 \times 6 \times 2 = 96$
b aantal = $12 \times 16 \times 2 = 384$
c Benzine, diesel, hybride met twee Opels en een Renault: OOR of ORO of ROO.
aantal = $8 \times 6 \times 1 + 8 \times 7 \times 2 + 5 \times 6 \times 2 = 220$
d OOO, VVV, RRR, MMM, BBB
aantal = $8 \times 6 \times 2 + 12 \times 15 \times 3 + 5 \times 7 \times 1 + 6 \times 14 \times 0 + 5 \times 16 \times 2 = 831$

22 a Ze doet een van de twee jasjes aan of geen jasje, dus voor de jasjes zijn er 3 manieren.
aantal = $3 \times 4 \times 6 \times 3 = 216$
b Voor een rok of een broek zijn er 4 + 3 manieren.
Blouse of trui OF blouse en trui, dus $(6 + 4) + 6 \times 4 = 34$ manieren.
aantal = $5 \times 7 \times 34 \times 4 = 4760$
c Alleen een trui OF een trui en een blouse, dus $4 + 4 \times 6 = 28$ manieren.
aantal = $5 \times 4 \times 28 \times 4 = 2240$

Bladzijde 68

23 Bij "De tweede letter is een andere dan de eerste letter." is aantal = $4 \times 3 = 12$.
Bij "De letters mogen gelijk zijn." is aantal = $4 \times 4 = 16$.

Bladzijde 69

24 a aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
b Het eerste cijfer is 3 of 4 of 5.
aantal = $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
c Het eerste cijfer is 6 en het tweede cijfer is 5 of 6 of 7 of 8 OF het eerste cijfer is 7 of 8.
aantal = $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 576$

25 a aantal = $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17\,576$
b aantal = $26 \cdot 25 \cdot 25 = 16\,250$
c aantal = $1 \cdot 26 \cdot 26 = 676$

© Noordhoff Uitgevers bv

26 **a** $\text{aantal} = 15 \cdot 26 \cdot 25 = 9750$
b m j j
$\text{aantal} = 15 \cdot 12 \cdot 11 = 1980$
c Bekijk eerst drank, dan hapjes, ten slotte muziek.
m, j, j of m OF j, m, j of m
$\text{aantal} = 15 \cdot 12 \cdot 25 + 12 \cdot 15 \cdot 25 = 9000$

Bladzijde 70

27 **a** $\text{aantal} = 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 608\,400$
b $\text{aantal} = 26 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 117\,936$
c $\text{aantal} = 26 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 = 234$
d 2 letters en 3 of 4 cijfers
$\text{aantal} = 26 \cdot 26 \cdot (4 \cdot 10 \cdot 10 + 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 6\,354\,400$
e 1 letter en 4 cijfers OF 2 letters en 3 cijfers
$\text{aantal} = 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 842\,400$

28 **a** $\text{aantal} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144$
b m j m j m j m
$\text{aantal} = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$
c $\text{aantal} = 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
d $\text{aantal} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 240$
e eerste en laatste psychologie OF eerste en laatste economie
Kies eerst de eerste en de laatste.
$\text{aantal} = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 960$
f j m m x x x x OF m j j x x x x
$\text{aantal} = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$

29 **a**
- $\text{aantal} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
- $\text{aantal} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

b
- $\text{aantal} = 6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1956$
- $\text{aantal} = 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 + 6^6 = 55\,986$

Bladzijde 71

30 **a** Hoeveel vierlettercodes zijn er als herhalingen toegestaan?
b Hoeveel drielettercodes zijn er met drie verschillende letters?
c Hoeveel vijflettercodes zijn er waarbij de tweede letter niet dezelfde is als de eerste letter?
d Hoeveel drielettercodes zijn er als er geen gelijke letters naast elkaar mogen staan?

31 **a** $\text{aantal} = 14 \cdot 5 = 70$
b 16, ~~16~~ of ~~16~~, 16
$\text{aantal} = 5 \cdot 26 + 26 \cdot 5 = 260$
c j m of m j
$\text{aantal} = 14 \cdot 17 + 17 \cdot 14 = 476$
d 15, 15 of 16, 16 of 17, 17
$\text{aantal} = 19 \cdot 18 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 404$
e 16, 15 of 17, 16 of 17, 15
$\text{aantal} = 5 \cdot 19 + 7 \cdot 5 + 7 \cdot 19 = 263$

32 **a** $\text{aantal} = 17 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 18 \cdot 14 = 91\,609\,056$
b $\text{aantal} = 17 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 22 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 15 = 9\,422\,645\,760$

33 Stel het codedeel van Lara bestaat uit n cijfers, dan zijn er voor Lara 5^n mogelijkheden en voor Paul 4^{n+2} mogelijkheden.
Uit $5^n \cdot 4^{n+2} =$ 51,2 miljoen volgt $n = 5$, dus het codedeel van Paul bestaat uit $5 + 2 = 7$ cijfers.

© Noordhoff Uitgevers bv

2.3 Permutaties en combinaties

Bladzijde 73

34 **a** aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
b aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$

Bladzijde 74

35 **a** aantal = $12 \cdot 11 = 132$
b aantal = $12! = 479\,001\,600$
c aantal = $7! \cdot 6! = 3\,628\,880$

36 **a** aantal = $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ = 12 nPr 5 = 95 040
b aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ = 8 nPr 5 = 6720
c aantal = 14 nPr 10 = 3 632 428 800

Bladzijde 75

37 **a** aantal = $4! = 24$
b aantal = $1 \cdot 3! = 6$

38 **a** aantal = $8! = 40\,320$
b aantal = $4! \cdot 5! = 2880$
c De twee 'pakketjes' kunnen op 2 manieren gezet worden, namelijk eerst de scheikundeboeken en dan de wiskundeboeken of omgekeerd.
Binnen het pakketje scheikundeboeken zijn 3! mogelijke volgorden en binnen het pakketje wiskundeboeken zijn dat er 5!.
Het totaal aantal = $2 \cdot 3! \cdot 5! = 1440$.

39 **a** Kies eerst een klassiek stuk en dan een hedendaags stuk.
aantal = $3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 7! = 30\,240$
b aantal = $6! \cdot 4! = 17\,280$
c $\not r$ r $\not r$ r $\not r$ r $\not r$ r $\not r$
aantal = $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 4! = 2880$
d [k k k] [r r r r] [h h] kan op 3! manieren.
aantal = $3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2! = 1728$

40 **a** Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters?
b Hoeveel drielettercodes zijn er met drie verschillende letters?
c Hoeveel vierlettercodes zijn er als herhalingen zijn toegestaan?
d Hoeveel vierlettercodes zijn er waarbij de eerste letter een a of een b is en de andere letters moeten worden gekozen uit c, d, e en f waarbij herhalingen zijn toegestaan?
e Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters waarbij de klinkers naast elkaar staan?
f Hoeveel zeslettercodes zijn er met zes verschillende letters waarbij de klinkers en de medeklinkers naast elkaar staan?

41 **a** aantal = $4 \cdot 3 = 12$
b De helft van 12, dus 6.

Bladzijde 77

42 **a** combinaties
b permutaties
c combinaties
d permutaties
e permutaties
f combinaties

43 **a** aantal = $\binom{18}{4} = 3060$

b aantal = $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$

c aantal = $\binom{20}{15} = 15\,504$

44 **a** aantal $= \binom{15}{5} = 3003$

b Het aantal wordt $\binom{13}{5} = 1287$, dus het aantal vermindert met $3003 - 1287 = 1716$.

Bladzijde 78

2

45 **a** aantal $= \binom{12}{3} = 220$

b aantal $= \binom{10}{5} = 252$

c aantal $= 12 \cdot 10 \cdot 7 = 840$

d aantal = 29 nPr 5 = 14 250 600

e aantal $= 9! \cdot 12! \cdot 10! \approx 6{,}3 \cdot 10^{20}$

46 **a** aantal $= \binom{28}{8} = 3\,108\,105$

b aantal $= 8! = 40\,320$

c aantal $= \binom{8}{5} = 56$

d aantal $= \binom{20}{6} = 38\,760$

47 **a** $\binom{17}{0} = 1 \qquad \binom{17}{1} = 17 \qquad \binom{17}{16} = 17 \qquad \binom{17}{17} = 1$

b Je kunt op één manier 0 personen kiezen uit een groep van 17.
Je kunt op 17 manieren 1 persoon kiezen uit een groep van 17.
Je kunt op 17 manieren 16 personen kiezen uit een groep van 17. Je kiest er immers altijd 1 niet.
Je kunt op één manier 17 personen kiezen uit een groep van 17.

c $\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$

48 **a** aantal $= \binom{60}{5} = 5\,461\,512$

b aantal $= \binom{40}{4} = 91\,390$

c aantal $= \binom{60}{5} \cdot \binom{40}{4} \approx 5 \cdot 10^{11}$

Bladzijde 79

49 **a** aantal $= \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{3} = 1680$

b aantal $= \binom{6}{6} = 1$

c aantal = aantal met 0 meisjes + aantal met 1 meisje $= \binom{6}{6} + \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} = 55$

d aantal = aantal met 5 jongens + aantal met 6 jongens $= \binom{6}{5} \cdot \binom{9}{1} + \binom{6}{6} = 55$

Alternatieve uitwerking
aantal = aantal met 5 of 6 jongens
= aantal met 1 of 0 meisjes
= 55 (zie c)

© Noordhoff Uitgevers bv

50 a aantal = $\binom{10}{2} \cdot \binom{3}{2} = 135$

b aantal = aantal met 3 rode + aantal met 4 rode = $\binom{10}{3} \cdot \binom{8}{1} + \binom{10}{4} = 1170$

c aantal = $\binom{13}{4} = 715$

d aantal = aantal met 0 groen + aantal met 1 groene = $\binom{15}{4} + \binom{3}{1} \cdot \binom{15}{3} = 2730$

51 a aantal = $\binom{12}{5} = 792$

b aantal = aantal met beide broers + aantal zonder de broers = $\binom{2}{2} \cdot \binom{10}{3} + \binom{10}{5} = 372$

c aantal = aantal met Frits + aantal met Geert + aantal zonder Frits en Geert

$= \binom{1}{1} \cdot \binom{10}{4} + \binom{1}{1} \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 672$

Bladzijde 80

52 a aantal = $\binom{36}{8} = 30\,260\,340$

b aantal = $\binom{36}{4} \cdot \binom{33}{4} = 2\,410\,392\,600$

c aantal = $\binom{20}{2} \cdot \binom{36}{5} \cdot \binom{13}{1} = 931\,170\,240$

d aantal = $\binom{36}{7} \cdot \binom{33}{1} + \binom{36}{8} = 305\,733\,780$

e aantal = $\binom{12}{2} \cdot \binom{57}{6} = 2\,395\,024\,632$

f aantal = $33 \cdot 32 \cdot 31 = 32\,736$

g aantal = $13 \cdot 68 \cdot 67 = 59\,228$

53 a aantal = $3 \cdot 3 \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot 1 = 16\,200$

b aantal = $1 \cdot 2 \cdot \left(\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2}\right) \cdot \binom{6}{3} \cdot 6 = 11\,040$

c aantal = $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}\right) \cdot 1 = 150$

2.4 Rijtjes en roosters

Bladzijde 82

54 a Combinaties, de volgorde waarin de groene vierkantjes gekozen worden is niet van belang.

b aantal = $\binom{6}{2} = 15$

Bladzijde 83

55 a aantal = $\binom{10}{8} = 45$

b aantal = $\binom{10}{5} = 252$

c aantal = $2^{10} = 1024$

d aantal = $1 \cdot 1 \cdot 2^8 = 256$

2

56 **a** aantal = 2^{20} = 1 048 576

b aantal = $\binom{20}{15}$ = 15 504

c Minstens 80% van 20 is minstens 16.

aantal = $\binom{20}{16}+\binom{20}{17}+\binom{20}{18}+\binom{20}{19}+\binom{20}{20}$ = 6196

Dat is $\frac{6196}{1\,048\,576} \times 100\% \approx 0{,}6\%$.

57 **a** $\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$ = 56 (zie ook theorie A op bladzijde 82) en $\frac{8!}{3!\cdot 5!}$ = 56

Dus $\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$ klopt.

b 55a aantal = $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ = 45

55b aantal = $\frac{10!}{5!\cdot 5!}$ = 252

56b aantal = $\frac{20!}{15!\cdot 5!}$ = 15 504

Bladzijde 84

58 **a** aantal = $\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$ = 29

b Meer A's dan B's, dus 4, 5 of 6 A's.

aantal = $\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}$ = 22

c aantal = 2^9 = 512

59 **a** aantal = $\binom{5}{3}$

b aantal = $\binom{5}{4}$ = 5

c aantal = 10 + 5 = 15

60 **a** 'drie enen en één drie' of 'twee enen en twee tweeën'

aantal = $\binom{4}{3}+\binom{4}{2}$ = 10

b 'vijf zessen en één vier' of 'vier zessen en twee vijven'

aantal = $\binom{6}{5}+\binom{6}{4}$ = 21

61 **a** NNOONNOO en OONNOONN

b Acht letters met vier keer de letter N.

c aantal routes = $\binom{8}{4}$ = 70

62 **a** Van A naar P heb je te maken met een rijtje bestaande uit twee N's en drie O's. Dat zijn $\binom{5}{2}$ mogelijkheden.

Van P naar B heb je te maken met een rijtje bestaande één N en 3 O's. Dat zijn $\binom{4}{1}$ mogelijkheden.

b Van A naar P EN van P naar B, dus totaal aantal routes is $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$ = 40.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Aantal routes van A naar $B = \binom{9}{3} = 84$. Daarvan gaan er 40 via P.

Dat is $\frac{40}{84} \times 100\% \approx 47{,}6\%$.

Bladzijde 85

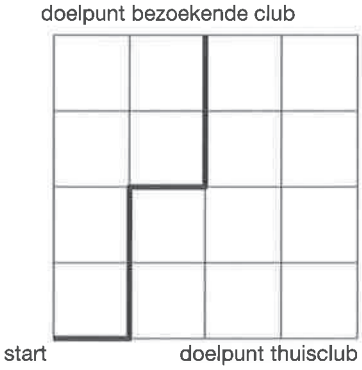
63 **a** aantal $= \binom{8}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{2} = 2240$

b aantal $= \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{8}{3} = 11\,200$

64 **a** aantal $= \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{2}{1} = 2016$

b aantal $= \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} = 36$

65 **a**



b aantal $= \binom{6}{4} = 15$

c aantal $= \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} = 40$

66 **a** aantal $= \binom{9}{3} = 84$

b aantal $= \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 16$

Alternatieve uitwerking
aantal $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$

Bladzijde 86

67 **a** Om van T in A te komen moet je 6 wegen doorlopen waarvan er 2 naar rechts gaan.
Dus $\binom{6}{2}$ routes.

b Om in het punt linksonder te komen, moet je 0 keer naar rechts, dus $\binom{6}{0}$ routes naar dit punt. Zo zijn er $\binom{6}{1}$ routes naar het punt daarnaast, $\binom{6}{2}$ routes naar A, enzovoort.

Op de zesde rij staan dus de getallen $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}$ en $\binom{6}{6}$.

c De getallen op de zevende rij zijn
1, $1 + 6 = 7$, $6 + 15 = 21$, $15 + 20 = 35$, $20 + 15 = 35$, $15 + 6 = 21$, $6 + 1 = 7$ en 1.
De getallen op de achtste rij zijn
1, $1 + 7 = 8$, $7 + 21 = 28$, $21 + 35 = 56$, $35 + 35 = 70$, $35 + 21 = 56$, $21 + 7 = 28$, $7 + 1 = 8$ en 1.

© Noordhoff Uitgevers bv

d Om op de 10e rij te komen heb je 10 keer keus tussen 'naar links' en 'naar rechts'. Dus er zijn in totaal $2^{10} = 1024$ routes.

Alternatieve uitwerking

De som van de getallen op de 10e rij is $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{10}$
$= 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024$.

Bladzijde 87

68 **a** Elk getal in de driehoek van Pascal krijg je door de twee getallen die er schuin boven staan op te tellen. $\binom{9}{4}$ is het 5^e getal in rij 9. $\binom{8}{3}$ is het 4^e getal in rij 8 en $\binom{8}{4}$ is het 5^e getal in rij 8. $\binom{8}{3}$ en $\binom{8}{4}$ staan precies schuin boven $\binom{9}{4}$.

b
- $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{5}$
- $\binom{12}{8} + \binom{12}{9} = \binom{13}{9}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

69 **a** Bijvoorbeeld $1 + 4 + 10 + 20 = 35$ en $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

b De getallen in dit hockeystickpatroon zijn achtereenvolgens $\binom{5}{0}, \binom{6}{1}, \binom{7}{2}, \binom{8}{3}, \binom{9}{4}$ en $\binom{10}{4}$.

c
- $\binom{8}{0} + \binom{9}{1} + \binom{10}{2} + \binom{11}{3} = \binom{12}{3}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$

Bladzijde 88

70 aantal $= \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$, zie theorie C op bladzijde 88.

aantal $= \dfrac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$, zie opgave 57.

Bladzijde 89

71 **a** aantal $= \binom{14}{8} \cdot \binom{6}{4} = 45\,045$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{14!}{8! \cdot 4! \cdot 2!} = 45\,045$

b aantal $= \binom{13}{3} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{1} = 360\,360$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{13!}{3! \cdot 5! \cdot 4!} = 360\,360$

c aantal $= \binom{16}{3} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 3\,632\,428\,800$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{16!}{3! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 3\,632\,428\,800$

d aantal $= \binom{11}{1} \cdot \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} = 34\,650$

© Noordhoff Uitgevers bv

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$

e aantal $= \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$

f aantal $= \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 7\,484\,400$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{12!}{(2!)^2} = 7\,484\,400$

72 **a** aantal $= \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} = 4200$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 4200$

b aantal $= \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4} = 280$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{8!}{3! \cdot 4!} = 280$

c Er zijn 12 letters, maar de 3 A's tellen voor 1. Verder 3 keer een S en 2 keer een P.

aantal $= \dfrac{10!}{3! \cdot 2!} = 302\,400$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 302\,400$

2.5 Allerlei telproblemen

Bladzijde 91

73 **a** aantal $= \binom{6}{3} = 20$

b aantal $= 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

c aantal $= 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

74 1 1 0,2
1 0,5 0,5 0,2
1 0,2 0,2 0,2 0,2 0,2 0,2
0,5 0,5 0,5 0,5 0,2
0,5 0,5 0,2 0,2 0,2 0,2 0,2 0,2
Dus 5 manieren.

75 **a** aantal $= 6! = 720$

b aantal $= 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 510$

c aantal $= 6^{10} = 60\,466\,176$

d aantal $= 6^2 + 6^3 + 6^4 = 1548$

76 aantal $= 6^{12} = 2\,176\,782\,336$

Bladzijde 92

77 a aantal $= \binom{10}{3} = 120$

b aantal $= \binom{10}{9} = 10$

c aantal $= 2^{10} = 1024$

d aantal = aantal van start naar $Y \times$ aantal van Y naar strand $= \binom{5}{3} \cdot 2^5 = 320$

78 a aantal = 10! = 3 628 800

b Aantal mogelijke rangschikkingen waarbij de raakvlaktoestellen als 1 telt is 7!.
Maar voor de raakvlaktoestellen zijn er 4! mogelijke rangschikkingen.
Het totale aantal is $4! \cdot 7! = 120\,960$.

c Binnen de raakvlaktoestellen zijn er 4! mogelijkheden.
Binnen de hoogtetoestellen zijn er 3! mogelijkheden.
Voor de doorgangen zijn er 2 mogelijkheden.
Voor deze drie toestelsoorten zijn er 3! rangschikkingen.
Het totale aantal is $1 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2 = 1728$.

79 aantal $= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 10$ nPr $4 = 5040$

80 a aantal $= 10^4 = 10\,000$

b aantal = 4! = 24

c Stel de pincode bestaat uit de cijfers a, b en c.
Als a dubbel wordt gebruikt zijn er $\frac{4!}{2!} = 12$ (of $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$) mogelijkheden.
Er zijn ook 12 mogelijkheden als b dubbel wordt gebruikt en ook 12 mogelijkheden als c dubbel wordt gebruikt.
Dus totale aantal $= 3 \cdot 12 = 36$.
36 > 24, dus hij heeft gelijk.

Bladzijde 93

81 aantal $= \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4} = 514\,594\,080$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \frac{18!}{6! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3!} = 514\,594\,080$

82 a aantal $= 3^{19} = 1\,162\,261\,467$

b aantal $= \binom{19}{5} = 11\,628$

c aantal $= \binom{19}{6} \cdot \binom{13}{6} = 46\,558\,512$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \frac{19!}{6! \cdot 6! \cdot 7!} = 46\,558\,512$

d aantal $= \binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} = 191$

e Het eerste, middelste en laatste branden rood of groen. De overige 16 lampjes branden rood of groen of zijn uit.
aantal $= 2^3 \cdot 3^{16} = 344\,373\,768$

f aantal $= \binom{19}{5} \cdot 2^{14} = 190\,513\,152$

83 Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt OF van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt.

Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt:

© Noordhoff Uitgevers bv

Stel dat het cijfer 4 driemaal wordt gebruikt, dan zijn er $\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 20$ mogelijkheden.
Dit geldt ook als '7' of '8' driemaal wordt gebruikt, dus $3 \cdot 20 = 60$ mogelijkheden.

Van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt:
Er zijn $\binom{3}{2} = 3$ tweetallen mogelijk die dubbel worden gebruikt (4 en 7 dubbel OF 4 en 8 dubbel OF 7 en 8 dubbel). Elk van deze mogelijkheden levert $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$ mogelijkheden. Dus als twee cijfers dubbel worden gebruikt zijn er 90 mogelijkheden.

Totaal $60 + 90 = 150$ mogelijkheden.

Alternatieve uitwerking
Van de drie verschillende cijfers wordt er één drie keer gebruikt OF van de drie verschillende cijfers worden er twee dubbel gebruikt.
Eén cijfer drie keer gebruikt: $3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$ mogelijkheden.

Twee dubbel gebruikt: $\binom{3}{2} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 90$ mogelijkheden.
Totaal $60 + 90 = 150$ mogelijkheden.

84 **a** aantal = 16 nPr 12 $\approx 8{,}7 \cdot 10^{11}$
b aantal = 12! = 479 001 600
c Voor de eerste rij zijn er $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 4$ mogelijkheden.
Voor de tweede rij zijn dan nog er $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$ mogelijkheden.
Voor de derde en vierde rij zijn er dan respectievelijk nog $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$ en $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4$ mogelijkheden.
aantal = $12! \cdot 4^4 \approx 1{,}2 \cdot 10^{11}$
d De 4 socialmedia- en chat-apps kunnen op 4! = 24 manieren worden gerangschikt.
Er zijn 4 rijen en 4 kolommen waar deze kunnen komen, dus 8 mogelijkheden in totaal.
Voor de overige apps zijn er nog 12 nPr 8 mogelijkheden.
aantal = $4! \cdot 8 \cdot 12$ nPr 8 = 3 832 012 800

Diagnostische toets

Bladzijde 94

1 **a**

SOM

6		8	9	10	11	12	
5			8	9	10	11	
4				8	9	10	← b
3					8	9	
2						8	← a
1							
	1	2	3	4	5	6	

aantal = 5
b aantal = 10
c

PRODUCT

6	6					
5	5					
4	4	8				
3	3	6	9			
2	2	4	6	8		
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

aantal = 17

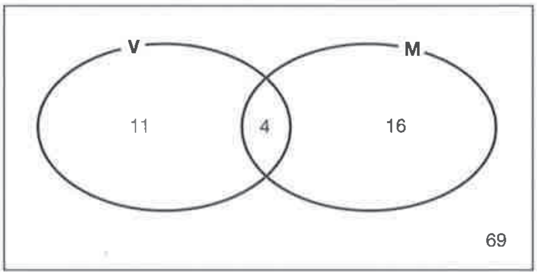
2 a Mogelijkheden zijn
1 1 1
1 1 2 1 2 1 2 1 1
1 1 3 1 3 1 3 1 1
1 2 2 2 1 2 2 2 1
aantal = 10

b Mogelijkheden zijn
1 1 4 1 4 1 4 1 1
1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1
2 2 2
aantal = 10

3 a

		moeder wel	moeder niet	
vader	wel	4	11	**15**
	niet	16	**69**	85
		20	80	**100**

V: vader heeft aan universiteit gestudeerd
M: moeder heeft aan universiteit gestudeerd



b Alleen de vader, dus vader wel en moeder niet.
aantal = 11

4 a aantal = $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10 = 600$
b aantal = $(4 + 3) \cdot (5 + 10) = 7 \cdot 15 = 105$

5 a aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$
b Getal kleiner dan 50 000, dus eerst cijfer 2, 3 of 4.
aantal = $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$
c aantal = $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16\,807$
d Getal groter dan 54 000, dus eerste cijfer 5 en tweede cijfer 4, 5, 6, 7 of 8 of eerste cijfer 6, 7, of 8.
aantal = $1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 8918$

Bladzijde 95

6 a aantal = $8! = 40\,320$
b aantal = $6! \cdot 3! = 4320$.
c Je kunt op $5 \cdot 4 = 20$ manieren de twee meisjesfietsen voor de buitenkant kiezen. Daarna moeten de overige 6 fietsen geplaatst worden, dat kan op 6! manieren.
Dus aantal = $20 \cdot 6! = 14\,400$.
d aantal = $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$

7 a aantal = $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} = 225$

b aantal = $\binom{5}{3} \cdot \binom{9}{1} + \binom{5}{4} = 95$

c aantal = $\binom{11}{4} = 330$

© Noordhoff Uitgevers bv

8 **a** aantal $= \binom{11}{6} = 462$

b Meer dan 7 keer kop, dus 8, 9, 10 of 11 keer kop.

aantal $= \binom{11}{8} + \binom{11}{9} + \binom{11}{10} + \binom{11}{11} = 232$

c aantal $= 2^{11} = 2048$

9 aantal $= \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{2} = 350$

10 aantal $= \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 60$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \dfrac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$

11 **a** aantal $= \dfrac{10!}{2! \cdot 3!} = 302\,400$

Alternatieve uitwerking

aantal $= \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 302\,400$

b aantal $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

c aantal $= 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 = 252$

d aantal $= 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2793$